. DM03.B : Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

La notion de moyenne est historiquement reliée à celle de valeur intermédiaire, appelée aussi *médiété*. Étant donné deux nombres a et b, comment choisir une valeur c pour que a soit à c ce que c est à b ?
La réponse diffère selon l'opération choisie pour aller d'un nombre à l'autre.
Par exemple, pour aller de 2 à 18, on peut ajouter deux fois 8, avec une étape en 10, ou multiplier deux fois par 3, avec une étape en 6. Le premier cas décrit une moyenne arithmétique, qui s'obtient par la fraction $\dfrac{2+18}{2}$. Le second cas est une moyenne géométrique, qui s'obtient avec la racine carrée $\sqrt{2 \times 18}$.

Partie A : Définition.
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b,
on note $A(a;b) = \frac{a+b}{2}$ la ***moyenne arithmétique*** de a et b,
et $G(a;b) = \sqrt{a \times b}$ la ***moyenne géométrique*** de a et b.

1. Calculer et comparer $A(9;4)$ et $G(9;4)$.
2. Calculer et comparer $A(2;32)$ et $G(2;32)$.
3. Conjecturer une inégalité entre $A(a;b)$ et $G(a;b)$.
4. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, développer $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.
5. En déduire une preuve de votre conjecture.

Partie B : Application.
On reprend l'exemple des nombres 9 et 4.
On note $A_1 = A(9;4)$, et $G_1 = G(9;4)$.
Nous avons deux nombres, A_1 et G_1, dont on peut calculer les moyennes arithmétique et géométrique.
Notons $A_2 = A(A_1;G_1)$ et $G_2 = G(A_1;G_1)$, on obtient en les calculant deux nouveaux nombres, dont on peut encore calculer les moyennes arithmétiques et géométriques.

1. Calculer A_1 et G_1, A_2 et G_2, A_3 et G_3 et présenter ces résultats dans un tableau.
   Que semble-t-il se passer ?
2. Écrire un algorithme (ou un diagramme) qui calcule la moyenne arithmétique de deux nombres, leur moyenne géométrique, et la différence de ces deux moyennes.
   Les plus à l'aise pourront améliorer cet algorithme pour qu'il réitère le calcul jusqu'à une précision donnée.